

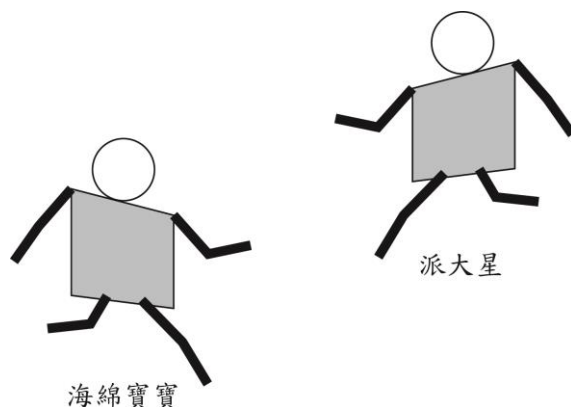
## 40 佔房子遊戲…天下圍攻

一隻老虎的臉孔，一隻螃蟹的體態，一片葉子的形狀，人類的身體，一個完整的圓以及蜂窩結構等等，乍看之下給人的感覺是完全均衡的，這多半要歸因於他們的對稱。對稱是一種數學均衡的行為，也是讓宇宙和諧的重要支柱，一般所談的對稱有三種：圓周對稱於圓心是「點對稱」，人類身體的左右對稱稱為「線對稱」，例如，達文西的《維特魯威人》這幅素描就是線對稱，而人照鏡子時，與鏡中人的對稱稱為「面對稱」。又球對稱於球心也是點對稱，圓周對稱於直徑是線對稱，球對稱於通過球心的平面為面對稱。



▲動物的線對稱體態

有過請教練教球的經驗嗎？如果有，那將很容易理解點對稱的好處。



▲海綿寶寶與派大星教練的點對稱練球

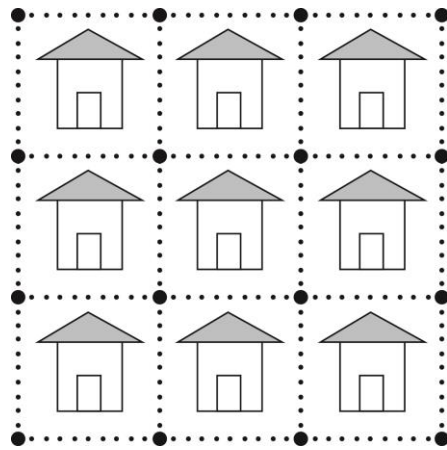
當你站在教練的對面，教練命令你拿著拍子跟他一起揮拍時，會發現教練跟你的揮拍動作剛好對稱於你與教練連線的中點，而且這是一種點對稱。與教練同步揮拍，看似模仿與跟隨，或者說拿香跟著拜，但更貼切的說，它是在做對稱這種均衡的運動。他有兩個好處，其一，練好基本動作，其二，在比賽時，只需與對手作完全對稱的動作，就可以

把球打回去。所以模仿、跟隨或者說拿香跟著拜一定就不好嗎？不要受到文字的影響，事實上，他們就是對稱的意思。

其實，對稱這道「數」光一直普照著我們的日常生活，但是我們始終對他的理解不夠深入，甚至沒有注意到它的存在。我們希望透過一道遊戲讓讀者更深入的瞭解對稱。

---

甲、乙兩兄弟以蓋房子的圍牆來分祖先所留下來的九間房子，這九間房子的分佈如下圖所示，每間房子有四面圍牆，而相鄰的房子可以共用一面圍牆，所以只需蓋 24 面圍牆（圖中的 24 條虛線），九間房子的圍牆就可完成：



甲、乙蓋圍牆的規則是這樣的：

- (1) 甲、乙輪流，每人每次只能蓋一面圍牆，蓋過的圍牆不能重複蓋。
- (2) 房子屬於蓋第四面圍牆者。
- (3) 佔有最多房子者勝。

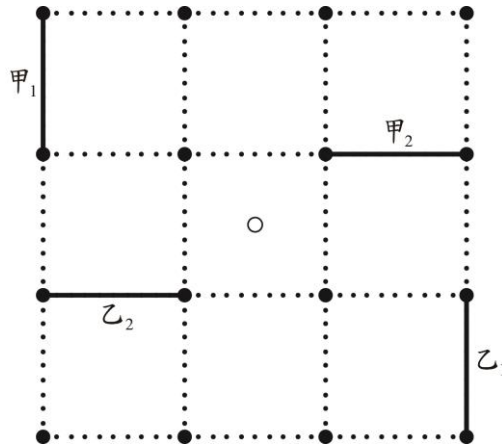
問：先蓋圍牆者或後蓋圍牆者會贏，又其策略為何？

---

這道遊戲與坊間書籍所談的「佔房子遊戲」很像，但有很大的差別。一般書籍的遊戲規則是「當佔了一間房子時，還可以再圍一道牆壁」，而這裡是不行的，兩人輪流，每次只能圍一道牆壁。這個差別對遊戲的影響很大，一般書籍所談的「佔房子遊戲」，並沒有很好的數學方法或策略來告訴玩者「誰會贏，用什麼玩法。」

現在就讓我們對這道遊戲作剖析，進而尋找解決這問題的最後一塊拼圖。這是一則很奇

怪的遊戲，原因是後玩者有必勝的策略。這策略跟數學裡的對稱性相關：就以下圖作解說，將土地的中心點以白色圓圈表示，除中心點所在的房子之外，旁邊一共圍繞著 8 個房子。每當先玩者蓋第一道圍牆時，後玩者就跟隨在此圍牆對稱於中心點的位置蓋下對應的圍牆（如下圖所示），接著先玩者蓋下另一道圍牆後，後玩者還是模仿對稱於中心點的位置蓋下對應的圍牆，按照這樣的規律，輪流把所有的圍牆蓋完。



- (1) 因為對稱的關係，先玩者與後玩者在中心點外圍的 8 個房子中，會各佔一半，即各佔 4 個房子。
- (2) 中心點所在的房子會被後玩者佔去（因為對稱關係，後玩者會蓋那房子的最後一道圍牆）。

由此知道：後玩者一定可以擁有 5 個房子，所以必勝。

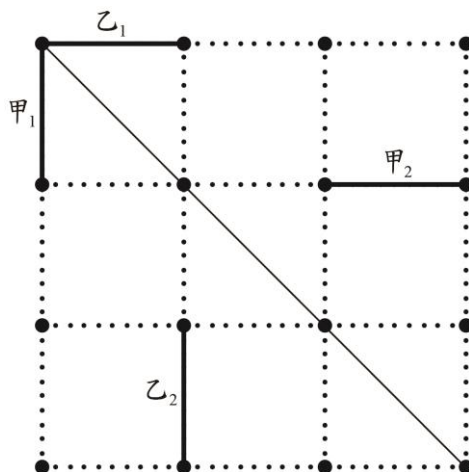
利用點對稱的概念，後玩者可以輕易的在這道遊戲打敗對手，雖然後玩者只是跟隨先玩者的腳步，在對稱的位置築圍牆，但是先玩者卻毫無招架的餘地。可見，克敵致勝不一定要利器，使用正確的數學概念才是重點。這道遊戲是從坊間的佔房子遊戲改編而來。起先覺得好玩，在師大數學系的「數學解題」這門課上使用，其間，只知後玩者佔有優勢，不知道原委。後來有一次到建國中學演講時，一位學生提出對稱的觀念，才找到這道遊戲的最後一塊拼圖。

關於這道遊戲有幾件值得說明的點，列舉如下：

- (1) 當土地上有 25 間，49 間，... 等奇數間房子時，後玩者採取對稱的方法就可以贏得比賽。

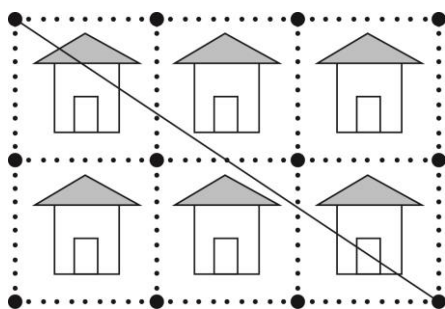
- (2) 若土地上並不是 9 間房子，而是 4 間，16 間，36 間，…等偶數間房子，則對稱的使用僅能與先玩者打成平手，無法略勝一籌。這種情形，後玩者有其它策略可用嗎？
- (3) 如果將贏的規定改為「佔較少房子者贏」，那麼誰有贏的策略呢？

二〇〇七年六月四日受邀到竹東教網中心給一場〈如何指導學生製作數學科展〉的演講，當我介紹完這道蓋房子遊戲之後，有兩位老師發現另一種贏的策略：



他們建議後玩者採用線對稱（與斜對角線線對稱）的回應方法，這樣可以得到六比四，也就是後玩者多蓋三間房子的意思。而多蓋的三間就是對角線穿越的那三間。將這兩位老師的方法套用在 4 間，16 間，36 間，…等偶完全數間的房子，是否可以推得後玩者也會贏，而且也是贏對角線所畫過的那些房子呢？

如果將此遊戲推廣到長方形，例如 3×2 的情形，那麼情形又如何呢？



觀察上圖，對角線畫過四間房子所在的小正方形，贏的策略與贏多少間房子跟這四個小正方形拼成的形狀有關嗎？又其它不同大小的長方形會如何呢？